

BILANGAN PANGKAT

1. Bilangan Pangkat

Diambil sembarang bilangan, misalkan 2, kemudian dikalikan sebanyak 5 kali, jadi $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Penulisan seperti ini terlalu panjang dan kurang praktis. Jadi cukup menuliskannya sebagai bilangan berpangkat yaitu 2^5 .

Bilangan berpangkat adalah perkalian berulang dari bilangan tersebut.

$$\underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_p = a^p$$

Keterangan:

a^p = bilangan berpangkat

a = bilangan pokok

p = pangkat

Semula tampaknya bilangan berpangkat harus merupakan bilangan asli, namun dalam perkembangan selanjutnya dikenalkan bilangan berpangkat 0, bilangan berpangkat negatif, dan bilangan berpangkat rasional. Bilangan yang dipangkatkan juga berkembang bukan hanya bilangan cacah, tetapi bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan real.

Sifat-sifat bilangan berpangkat:

1. Perkalian dua bilangan berpangkat

$$\text{Contoh: } 2^3 \times 2^2 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_3 \times \underbrace{2 \times 2}_2 = 2^5$$

$$\text{maka } a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

2. Pembagian dua bilangan berpangkat

$$\text{Contoh: } 2^3 : 2^2 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_3 : \underbrace{2 \times 2}_2 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2^1$$

$$\text{maka } a^p : a^q = a^{p-q}$$

3. Perpangkatan dua bilangan berpangkat

$$\text{Contoh: } (3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

$$\text{Maka } (a^p)^q = a^{pq}$$

4. Perpangkatan bilangan rasional

$$\text{Contoh: } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\text{maka } \left[\frac{a}{b}\right]^p = \frac{a^p}{b^p}$$

5. Perpangkatan dua perkalian bilangan

$$\text{Contoh: } (2 \times 3)^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

$$\text{maka } (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

6. Bilangan berpangkat 0

$$\text{Contoh: } 2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

$$\text{Padahal } 2^3 : 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{8}{8} = 1 \quad \left. \vphantom{\frac{2^3}{2^3}} \right\} \text{Jadi } 2^0 = 1$$

$$\text{maka } a^0 = 1$$

Bukti : Sesuai dengan sifat pangkat nomor 1 yaitu $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ untuk $q = 0$ diperoleh $a^p \cdot a^0 = a^p$.

Tampak bahwa a^0 berlaku seperti bilangan 1 sehingga didefinisikan

$$a^0 = 1 \text{ untuk } a \neq 1.$$

7. Pangkat bulat negatif

$$\text{Contoh: } 2^2 : 2^5 = 2^{2-5} = 2^{-3}$$

$$\text{Padahal } 2^2 : 2^5 = \frac{2^2}{2^5} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^3} \quad \left. \vphantom{\frac{2^2}{2^5}} \right\} \text{Jadi } 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$\text{maka } a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Bukti:

Sesuai dengan sifat pangkat nomor 1 yaitu $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ untuk $q = -p$ diperoleh

$$a^p \cdot a^{-p} = a^{p+(-p)} = a^0 = 1.$$

Karena hasilkali $a^p \cdot a^{-p} = 1$ maka a^p dan a^{-p} berkebalikan.

$$\text{Sehingga } a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Rangkuman sifat-sifat eksponen/pangkat:

$$1. a^p \times a^q = a^{p+q}$$

$$2. a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$3. (a^p)^q = a^{pq}$$

$$4. \left[\frac{a}{b}\right]^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$5. (a \times b)^p = a^p \times b^p$$

$$6. a^0 = 1$$

$$7. a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Contoh soal dan Pembahasan:

1. Sederhanakan $\left(\frac{p^2}{q^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{2q}{p^3}\right)^2$

Pembahasan:

$$\left(\frac{p^2}{q^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{2q}{p^3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{p^6}{q^{-9}}\right) \cdot \left(\frac{4q^2}{p^6}\right) \dots\dots\dots \text{sifat nomor 4}$$

$$\Leftrightarrow (p^6 q^9) \cdot (4q^2 p^{-6}) \dots\dots\dots \text{sifat nomor 7}$$

$$\Leftrightarrow 4p^{6+(-6)} q^{9+2} \dots\dots\dots \text{sifat nomor 1}$$

$$\Leftrightarrow 4p^0 q^{11} \dots\dots\dots \text{sifat penjumlahan}$$

$$\Leftrightarrow 4q^{11} \dots\dots\dots \text{sifat nomor 6}$$

2. Sederhanakan: $\frac{2x^3 + 4x^6}{x^{-2}}$

Pembahasan:

$$\frac{2x^3 + 4x^6}{x^{-2}} \Leftrightarrow \frac{2x^3}{x^{-2}} + \frac{4x^6}{x^{-2}} \dots\dots\dots \text{sifat pembagian pecahan}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 x^2 + 4x^6 x^2 \dots\dots\dots \text{sifat nomor 7}$$

$$\Leftrightarrow 2x^{3+2} + 4x^{6+2} \dots\dots\dots \text{sifat nomor 1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^5 + 4x^8 \dots\dots\dots \text{hasil penjumlahan}$$

2. Persamaan Bilangan Pangkat

Bentuk Umum :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Konsep :

1. Samakan bilangan pokok
2. Samakan bilangan pangkat
3. Selesaikan

Contoh 1:

$$25^{2x+1} = 5^{10}$$

$$\Leftrightarrow (5^2)^{2x+1} = 5^{10}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2(2x+1)} = 5^{10}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4x = 10 - 2$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Jadi HP} = \{2\}$$

Contoh 2:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Jadi HP} = \{1\}$$

Pelatihan 3.

Kerjakan pelatihan berikut dengan baik, benar, dan cerdas!

1. Hitunglah!

a. 3^{-2}

c. $(0,2)^{-4}$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d. $\frac{3}{2^{-2}}$

2. Nyatakan bilangan-bilangan berikut ini dalam bentuk pangkat bulat positif.

a. 3^{-4}

c. a^{-3}

b. 3×5^{-2}

d. $\frac{4}{b^{-6}}$

3. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut!

a. $\frac{2^8}{2^5}$

c. $\frac{p^{-3}q^{-2}r^{-5}}{q^{-3}r^{-7}p^{-5}}$

b. $\frac{(3x4)^{-3}}{(2x3)^2}$

d. $(2x^{-3})(5x^2)(6x^{-5})$

4. Hitunglah!

a. $\left(\frac{64}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$

c. Jika $x=16$ dan $y=9$ maka $\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(2y^{\frac{1}{2}}\right)}$

b. $(-729)^{-\frac{4}{3}}$

d. $4 \times 64^{\frac{-1}{3}} \times 81^{\frac{1}{4}}$

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} = 64$

b. $16^{2x+1} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

c. $25^{x+1} = 125^x$